

## Dynamika modelu Solowa i modelu Mankiwa-Romera-Weila z endogenicznymi stopami oszczędności

**Autor:** Małgorzata Kamieniecka

### Abstrakt

Celem niniejszego opracowania jest analiza własności i dynamiki modelu wzrostu gospodarczego z endogeniczną stopą oszczędności. Punktem wyjścia do rozważań są dyskretne wersje neoklasycznego modelu wzrostu Solowa oraz rozszerzonego modelu Solowa. Okazuje się, że modyfikacja w postaci zmiennych stóp oszczędności zależnych od parametru o charakterze behawioralnym ma znaczny wpływ na dynamikę układu, czyniąc ją bardziej różnorodną. Pojawiają się rozwiązania okresowe, quasi-okresowe oraz chaos deterministyczny. Prognozowanie w długim okresie staje się mocno ograniczone.

**Słowa kluczowe:** wzrost gospodarczy, model Solowa, model Mankiwa-Romera-Weila, bifurkacje, chaos deterministyczny, zmienne stopy

oszczędności, wykładnik Lapunowa, warunki równowagi.

**JEL:** C62, E20, O41

### Wprowadzenie

Nieliniowe modele wzrostu gospodarczego, szczególnie te, które wyjaśniają przyczyny i powstawanie fluktuacji gospodarczych (cykli), to stosowane od lat narzędzie makroekonomiczne. Tematyce tej poświęcone są prace: Carsa Hommesa (Hommes 1993, 1995), Marji Lines i Franka Westerhoffa (Lines 2005, 2009; Westerhoff 2006c), Hansa-Waltera Lorenza (Lorenz 1987), Roberta Kruszewskiego (Kruszewski 2006) i wielu innych. Coraz częściej, również w polskiej literaturze, pojawia się pogląd, że, w związku z ostatnim kryzysem finansowym, możemy spodziewać się jeszcze większego zainteresowania modelowaniem układów o złożonej dynamice (Malaga 2011). Celem niniejszego opracowania jest skonstruowanie modelu wzrostu gospodarczego uwzględniającego endogeniczną stopę oszczędności, a następnie zbadanie jego dynamiki. Posłużą do tego dyskretne wersje neoklasycznego modelu wzrostu Solowa oraz rozszerzonego modelu Solowa. Model Solowa stosowany jest jako punkt wyjściowy do dalszych rozważań nad wzrostem gospodarczym. Wśród zalet modelu Solowa

najczęściej wymieniana jest zgodność z tzw. faktami stylizowanymi Kaldora (Kaldor 1957), prostota i możliwość modyfikacji modelu w taki sposób, aby uwzględnić wpływ interesujących nas zagadnień na zachowanie układu makroekonomicznego (Telega 2012). Najbardziej znaną modyfikacją modelu Solowa jest opracowany w 1992 roku przez N. Gregory'ego Mankiwa, Davida Romera i Davida N. Weila (Mankiw i in. 1992) dwuwymiarowy model uwzględniający dodatkowy czynnik produkcji w postaci kapitału ludzkiego. Kapitał ludzki definiowany przez S. Ryszarda Domańskiego (Domański 1993) jako „zasób wiedzy i umiejętności, zdrowia, energii witalnej zawarte w społeczeństwie” i od kilku wieków stanowi obiekt zainteresowania ekonomistów<sup>1</sup>, również w odniesieniu do analizy polskiej gospodarki

<sup>1</sup> Według S.R. Domańskiego pierwszym ekonomistą, który zwrócił uwagę na kapitał zawierający się w czynniku pracy, był William Petty (1623–1687). Zauważył on, że kapitał tkwiący w człowieku charakteryzuje się wieloma podobieństwami z kapitałem trwałym (rzeczowym).

(Woźniak 2005). Model Mankiwa, Romera i Weila, zaliczany formalnie do nowej teorii wzrostu, jest z powodzeniem modyfikowany i stosowany do wyjaśnienia zjawiska konwergencji, zarówno w wersjach stochastycznych (Kevin Lee i in. 1997: 357–392), jak i deterministycznych. Modyfikacje dotyczą np. uwzględniania wiedzy technologicznej jako kolejnego czynnika produkcji (Nonneman, Vanhoudt 1996: 943–953), transferu technologii pomiędzy krajami (Dowrick, Rogers 2002: 369–385), współzależności między krajami (Ertur, Koch 2007: 1033–1062), zmiany postaci funkcji produkcji (Masanjala, Papageorgiou 2004: 171–201). Tworzone są również wielowymiarowe modele (Tokarski 2007).

W opracowaniu przyjęto założenie, że model Mankiwa-Romera-Weila stanowi solidną podstawę do tworzenia nowych modeli, uwzględniających czynniki endogeniczne. Zgodnie z wynikami uzyskanymi w 2001 roku przez B.S. Bernanke'a oraz R.S. Gurkaynaka, długookresowy wzrost powinien być skorelowany ze zmiennymi behawioralnymi, które mają wpływ na stopę oszczędności (Bernanke, Gurkaynak 2001). W artykule zostanie przeprowadzona szczegółowa analiza modeli Solowa i Mankiwa-Romera-Weila po wprowadzeniu modyfikacji w postaci zmiennych stóp oszczędności zgodnie z propozycją Richarda H. Daya (Day 1982: 406–414). Analiza numeryczna zaproponowanych modeli przeprowadzona będzie za pomocą programu iDMC<sup>2</sup>.

## Główne założenia wykorzystanych modeli

### Model Solowa

Model Solowa w wersji podstawowej uwzględnia dwa czynniki produkcji: kapitał fizyczny ( $K$ ) i efektywny zasób pracy ( $AL$ ). Populacja oraz postęp techniczny charakteryzują się stałą i egzogeniczną stopą wzrostu odpowiednio  $n > 0$ ,  $g > 0$ . Produkcja w tym modelu może być przeznaczona na konsumpcję lub akumulację kapitału. Funkcja produkcji  $Y = F(K, AL)$  spełnia neoklasyczne założenia: jest rosnąca, w tempie malejącym, o stałych korzyściach skali i można ją przedstawić w postaci intensywnej. Kapitał amortyzuje się według stopy  $\delta > 0$ , a część dochodów przeznaczonych na akumulację kapitału wynosi  $s \in (0,1)$  i jest wielkością stałą. Równanie ruchu dla kapitału przyjmuje postać:

$$K_{t+1} = sY_t + (1 - \delta)K_t \quad (1)$$

<sup>2</sup> iDMC - interactive dynamical model calculator, M.Lines, A.Medio, www.gitorious.org/idmc

Kapitał w okresie następnym jest równy kapitałowi z okresu poprzedniego pomniejszonemu o deprecjację i powiększonemu o faktyczne inwestycje (które są równe oszczędnościom).

Zakładam stałą, egzogeniczną stopę wzrostu ( $n > 0$ ) populacji  $L$ :

$$L_{t+1} = (1 + n)L_t, \quad (2)$$

oraz stałą, egzogeniczną stopę ( $g > 0$ ) postępu technicznego  $A$ :

$$A_{t+1} = (1 + g)A_t \quad (3)$$

Produkt w okresie  $t$ ,  $Y_t$ , opisany jest dwuczynnikową funkcją produkcji  $Y_t = F(K_t, A_t L_t)$  spełniającą neoklasyczne założenia i zależy od kapitału  $K_t > 0$  oraz nakładu efektywnej pracy  $A_t L_t > 0$ .

Niech:

$$k_t = \frac{K_t}{A_t L_t} \quad (4)$$

oznacza kapitał przypadający na jednostkę efektywnej pracy. Wówczas

$$y_t = \frac{Y_t}{A_t L_t} \quad (5)$$

oznacza produkt przypadający na jednostkę efektywnej pracy. Korzystając z założenia o stałych korzyściach skali (funkcja produkcji jest jednorodna stopnia pierwszego):

$$Y_t = F(K_t, A_t L_t) = A_t L_t F\left(\frac{K_t}{A_t L_t}, 1\right) = A_t L_t f(k_t)$$

Podstawiając (2), (3), (4), (5) do równania (1), otrzymujemy równanie opisujące dynamikę kapitału na jednostkę efektywnej pracy:

$$k_{t+1} = \frac{1}{(n+1)(g+1)} [sf(k_t) + (1-\delta)k_t] \quad (6)$$

### Model Mankiwa-Romera-Weila

Model stworzony został w 1992 r. przez N.G. Mankiwa, D. Romera i D.N. Weila (Mankiw i in. 1992: 407–437) w celu pokazania, że neoklasyczna teoria wzrostu dobrze wyjaśnia różnice w poziomie dochodów między krajami oraz zjawisko konwergencji warunkowej. Model Mankiwa-Romera-Weila uwzględnia kapitał ludzki, który staje się kolejnym obok kapitału fizycznego ( $K$ ) i efektywnego zasobu pracy ( $AL$ ) czynnikiem produkcji. Podobnie jak w modelu Solowa populacja oraz postęp techniczny charakteryzują się stałymi i egzogenicznymi stopami wzrostu, odpowiednio:  $n > 0$  i  $g > 0$ . Produkt w bieżącym okresie przeznaczany jest na konsumpcję, akumulację kapitału fizycznego i akumulację

kapitału ludzkiego ( $H$ ). Trzyczynnikowa funkcja produkcji  $F(K, H, AL)$  spełnia neoklasyczne założenia. Kapitał fizyczny oraz kapitał ludzki deprecjonują się według stałych stóp:  $\delta_K > 0$  oraz  $\delta_H > 0$ . Część dochodów przeznaczonych na akumulację kapitału fizycznego oraz kapitału ludzkiego wynosi odpowiednio:  $s_K, s_H \in (0, 1)$ ,  $s_K + s_H < 1$ . Uwzględniając powyższe założenia, równania ruchu opisujące dynamikę całkowitych zasobów kapitału fizycznego i ludzkiego w modelu Mankiwa-Romera-Weila przyjmują postać:

$$K_{t+1} = s_K Y_t + (1 - \delta_K) K_t, \quad (7)$$

$$H_{t+1} = s_H Y_t + (1 - \delta_H) H_t \quad (8)$$

Tak jak w modelu Solowa, populacja  $L$  wzrasta w stałym tempie  $n$  (2), a postęp techniczny w stałym tempie  $g$  (3).

Niech:

$$k_t = \frac{K_t}{A_t L_t}, \quad h_t = \frac{H_t}{A_t L_t}, \quad y_t = \frac{Y_t}{A_t L_t}.$$

Ponownie korzystając z założenia o stałych korzyściach skali, otrzymujemy:

$$Y_t = F(K_t, H_t, A_t L_t) = A_t L_t F\left(\frac{K_t}{A_t L_t}, \frac{H_t}{A_t L_t}, 1\right) = A_t L_t \phi(k_t, h_t).$$

Wówczas równania ruchu opisujące dynamikę kapitału fizycznego i ludzkiego przypadające na jednostkę efektywnej pracy przyjmują postać:

$$k_{t+1} = \frac{1}{(n+1)(g+1)} [s_K \phi(k_t, h_t) + (1 - \delta_K) k_t], \quad (9)$$

$$h_{t+1} = \frac{1}{(n+1)(g+1)} [s_H \phi(k_t, h_t) + (1 - \delta_H) h_t]. \quad (10)$$

### Zmienne stopy oszczędności

Zarówno model Solowa, jak i model Mankiwa-Romera-Weila charakteryzują się egzogenicznymi, stałymi stopami oszczędności. W konstruowanych modelach ograniczenia te zostaną usunięte. Stopy oszczędności będą zmienne w czasie i endogeniczne. Powyższy postulat zostanie zrealizowany poprzez adaptację propozycji R.H. Daya (Day 1982: 406–414) wiążącej stopę oszczędności z dochodem, posiadanym majątkiem i realną stopą procentową. Dla modelu Solowa oszczędności są teraz opisane równaniem:

$$s y_t = a \left(1 - \frac{b}{r}\right) k_t, \quad (11)$$

gdzie:  $a > 0$ ,  $b \in (0, r)$ ,  $r$  oznacza realną stopę procentową:  $r = \frac{df(k)}{dk}$ ,  $a$  i  $b$  to parametry,

które mają charakter behawioralny i obrazują zachowanie konsumenta w stosunku do realnej stopy procentowej (uśrednione wielkości dla całej populacji).

Implementując powyższe założenie w modelu Mankiwa-Romera-Weila, otrzymujemy:

$$s_K y_t = a_K \left(1 - \frac{b_K}{r_K}\right) k_t, \quad (12)$$

$$s_H y_t = a_H \left(1 - \frac{b_H}{r_H}\right) h_t, \quad (13)$$

gdzie:  $a_K, a_H > 0$ ,  $b_K \in (0, r_K)$ ,  $b_H \in (0, r_H)$ ,  $r_K, r_H$  – realne stopy procentowe:

$$r_K = \frac{\partial \phi(k, h)}{\partial k}, \quad r_H = \frac{\partial \phi(k, h)}{\partial h}, \quad \text{równe krańco-}$$

wej produktywności każdego typu kapitału,  $a_K, a_H, b_K, b_H$  – parametry o charakterze behawioralnym obrazujące zachowanie konsumenta w stosunku do realnych stóp procentowych (uśrednione wielkości dla całej populacji). Bez straty ogólności w dalszej części opracowania założono, że stopy deprecjacji kapitału fizycznego i ludzkiego w modelu Mankiwa-Romera-Weila są równe. Uprości to stronę algebraiczną przekształceń. Podobnie:  $a_K = a_H$  oraz  $b_K = b_H$ . W dalszych rozważaniach przyjęto funkcję produkcji typu Cobb-Douglasa. Wówczas:  $f(k) = k^\gamma$  oraz  $\phi(k, h) = k^\alpha h^\beta$ , gdzie  $0 < \gamma < 1$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $0 < \beta < 1$ ,  $\alpha + \beta < 1$ .

Po modyfikacji, czyli wprowadzeniu zmiennych stóp oszczędności zgodnie z: (11), (12), (13), oszczędności w obu analizowanych modelach będą zależne od dochodu i będą rosły wraz ze wzrostem realnej stopy procentowej.

### Model Solowa ze zmienną stopą oszczędności

Po uwzględnieniu zmiennej stopy oszczędności zgodnie z (11) równanie opisujące dynamikę kapitału na jednostkę efektywnej pracy przyjmuje postać:

$$k_{t+1} = \frac{1}{(n+1)(g+1)} \left[ a(1 - b\gamma^{-1} k_t^{1-\gamma}) k_t + (1 - \delta) k_t \right] \quad (14)$$

Pierwszym elementem analizy zmodyfikowanego modelu Solowa będzie wyznaczenie równowagi (stanu stacjonarnego). Równowaga jest punktem stałym równania (14)

i spełnia warunek:  $k_{t+1} = k_t = k^*$ .

**Twierdzenie 1.**

Model Solowa z endogeniczną stopą oszczędności opisany równaniem (14) posiada jedno położenie równowagi:

$$k^* = \theta^{\frac{1}{1-\gamma}} \gamma^{\frac{1}{1-\gamma}}, \quad k^* > 0, \quad (15)$$

gdzie:

$$\theta = \frac{1 + a - \delta - (n+1)(g+1)}{ab}$$

Dowód:

punkt stały równania (14) spełnia warunek:

$k_{t+1} = k_t = k^*$ , zatem:

$$k^* = \frac{1}{(n+1)(g+1)} [a(1 - b\gamma^{-1}(k^*)^{1-\gamma})k^* + (1-\delta)k^*] \quad (16)$$

Powyższe po przekształceniach przyjmuje postać:

$$\gamma^{-1}(k^*)^{1-\gamma} = \frac{1 + a - \delta - (n+1)(g+1)}{ab}$$

Po oznaczeniu prawej strony równania przez  $\theta$  otrzymujemy rozwiązanie równania (16):

$$k^* = \theta^{\frac{1}{1-\gamma}} \gamma^{\frac{1}{1-\gamma}},$$

gdzie:

$$\theta = \frac{1 + a - \delta - (n+1)(g+1)}{ab}$$

Kolejnym etapem analizy zaproponowanego modelu jest wyznaczenie warunków, przy których wyznaczona równowaga jest lokalnie asymptotycznie stabilna.

**Twierdzenie 2.**

Równowaga (16) jest lokalnie asymptotycznie stabilna, gdy parametr  $a$  spełnia nierówność:

$$(n+1)(g+1) - 1 + \delta < a < \frac{\gamma-3}{\gamma-1}(n+1)(g+1) - 1 + \delta \quad (17)$$

Dowód:

niech:

$$d(k) = \frac{1}{(n+1)(g+1)} [a(1 - b\gamma^{-1}k^{1-\gamma})k + (1-\delta)k]$$

oznacza prawą stronę równania (14).

Punkt stały równania (14) jest asymptotycznie stabilny, gdy:

$$-1 < d'(k^*) < 1, \quad (18)$$

gdzie:

$$d'(k^*) = \frac{a + 1 - \delta - (2-\gamma)ab\theta}{(n+1)(g+1)}$$

Zatem warunek lokalnej asymptotycznej stabilności przyjmuje postać:

$$-1 < \frac{a + 1 - \delta - (2-\gamma)ab\theta}{(n+1)(g+1)} < 1,$$

która po podstawieniu:

$$\theta = \frac{1 + a - \delta - (n+1)(g+1)}{ab}$$

jest równoważna:

$$-1 < \frac{(a+1-\delta)(\gamma-1)}{(n+1)(g+1)} + 2 - \gamma < 1$$

Proste przekształcenia algebraiczne prowadzą do zależności:

$$(n+1)(g+1) - 1 + \delta < a < \frac{\gamma-3}{\gamma-1}(n+1)(g+1) - 1 + \delta$$

Przykładowo, dla:  $\gamma = 0,59$ ;  $n=0,001$ ;  $\delta = 0,05$ ;  $g=0,05$ ;  $b=0,3$  obszar lokalnej asymptotycznej stabilności ze względu na parametr  $a$  ogranicza się do przedziału  $(0,1; 5,23)$ .

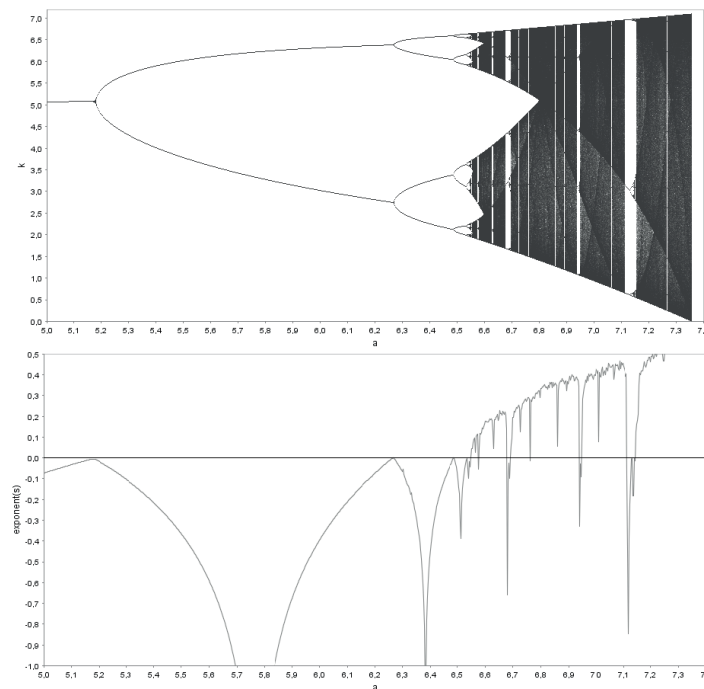
Przekraczanie obszaru lokalnej asymptotycznej stabilności wiąże się z występowaniem zjawiska bifurkacji, które polega na jakościowej zmianie własności modelu matematycznego układu dynamicznego przy drobnej zmianie jego parametrów (np. warunków początkowych procesu albo warunków brzegowych). W dynamice bifurkacją (łac. rozdzieleniem) nazywa się zmianę liczby rozwiązań równania różniczkowego lub różnicowego przy zmianie parametru tego równania. Przed przystąpieniem do analizy scenariusza utraty stabilności i lokalnych bifurkacji przedstawione będą podstawowe pojęcia z teorii bifurkacji (Medio, Lines 2001).

Dla jednoparametrowej rodziny dyskretnych układów dynamicznych stabilne położenie równowagi traci stabilność w wyniku bifurkacji podwojenia okresu, gdy przy zmianie parametru bifurkacyjnego jedna z rzeczywistych wartości własnych macierzy linearyzacji, zmniejszając swoją wielkość, przekracza -1, podczas gdy pozostałe wartości własne są co do modułu mniejsze od jedynki. Skutkiem tej bifurkacji jest powstanie orbity okresowej o okresie 2, która może być stabilna lub niestabilna. W wyniku następujących

po sobie bifurkacji podwojenia okresu mogą powstać orbity o okresie 4,8,16,..., a także może wystąpić zjawisko chaosu deterministycznego. Badanie długoterwałych zachowań modelu ułatwia analiza numeryczna. Za pomocą diagramów bifurkacyjnych przeanalizować można wpływ zmian parametru  $a$  na dynamikę modelu. Rysunek 1 przedstawia diagram bifurkacyjny ze względu na parametr  $a$  dla  $\gamma = 0,59$ ;  $n = 0,001$ ;  $\delta = 0,05$ ;  $g = 0,05$ ;  $b = 0,3$  wraz z odpowiadającym mu wykładnikiem Lapunowa.

Model Solowa ze zmienną, endogeniczną stopą oszczędności charakteryzuje się złożoną dynamiką dla wartości parametru  $a$  przekraczających maksymalną wartość z przedziału wyznaczonego

Rys.1. Diagram bifurkacyjny i odpowiadający mu wykładnik Lapunowa dla parametru  $a \in (5;7,4)$ .



Źródło: opracowanie własne.

nierówność (17). Początkowo kapitał zbiega do równowagi stacjonarnej  $k^*$ . W miarę wzrostu parametru  $a$  równowaga ta traci stabilność i trajektoria staje się okresowa. Im większa wartość parametru  $a$ , tym większy okres i amplituda oscylacji. Ostatecznie obserwujemy zjawisko chaosu deterministycznego (dodatni wykładnik Lapunowa), przy czym obszary chaotyczne poprzedzielane są oknami stabilnych orbit (cykli) o niskim okresie, które można zinterpretować jako matematyczne modele potencjalnych cykli gospodarczych (rys. 1). Prognozowanie w tym modelu jest ograniczone i zależy od wartości wykładnika Lapunowa. Im większy dodatni wykładnik Lapunowa, tym krótszy czas, w którym możemy przewidzieć wartość modelowanej zmiennej.

W dalszej części opracowania uwzględnione zostaną zmienne stopy oszczędności w modelu Mankiwa-Romera-Weila, a następnie zbadana będzie dynamika tak skonstruowanego, dwuwymiarowego modelu wzrostu gospodarczego.

### Model Mankiwa-Romera-Weila ze zmienną stopą oszczędności

Po wprowadzeniu zmiennych stóp oszczędności zgodnie z (12) i (13) równania opisujące ewolucję w czasie kapitału fizycznego oraz kapitału ludzkiego na jednostkę efektywnej pracy

przyjmują postać:

$$k_{t+1} = \frac{1}{(n+1)(g+1)} [a(1-b\alpha^{-1}k_t^{1-\alpha}h_t^{-\beta})k_t + (1-\delta)k_t], \quad (19)$$

$$h_{t+1} = \frac{1}{(n+1)(g+1)} [a(1-b\beta^{-1}k_t^{-\alpha}h_t^{1-\beta})h_t + (1-\delta)h_t] \quad (20)$$

Twierdzenie 3.

Zmodyfikowany model Mankiwa-Romera-Weila opisany równaniami (19) i (20) posiada dokładnie jeden punkt stały  $(k^*, h^*)$ , taki że:

$$k^* = \theta^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \alpha^{\frac{1-\beta}{1-\alpha-\beta}} \beta^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}}, \quad k^* > 0, \quad (21)$$

$$h^* = \theta^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} \beta^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\beta}}, \quad h^* > 0, \quad (22)$$

gdzie:

$$\theta = \frac{1+a-\delta-(n+1)(g+1)}{ab}.$$

Dowód:

punkt stały  $(k^*, h^*)$  układu równań (19), (20) spełnia warunki:

$$k_{t+1} = k_t = k^* \text{ oraz } h_{t+1} = h_t = h^*. \text{ Zatem:}$$

$$k^* = \frac{1}{(n+1)(g+1)} [a(1-b\alpha^{-1}(k^*)^{1-\alpha}(h^*)^{-\beta})k^* + (1-\delta)k^*], \quad (23)$$

$$h^* = \frac{1}{(n+1)(g+1)} [a(1-b\beta^{-1}(k^*)^{-\alpha}(h^*)^{1-\beta})h^* + (1-\delta)h^*] \quad (24)$$

Układ równań (23), (24) jest równoważny układowi:

$$\alpha^{-1}(k^*)^{1-\alpha}(h^*)^{-\beta} = \frac{a+1-\delta-(2-\gamma)ab\theta}{(n+1)(g+1)},$$

$$\beta^{-1}(k^*)^{-\alpha}(h^*)^{1-\beta} = \frac{a+1-\delta-(2-\gamma)ab\theta}{(n+1)(g+1)}.$$

Oznaczenie prawej strony obu równań przez  $\theta$  i przyrównanie lewych stron prowadzi do zależności:

$$h^* = \frac{\beta}{\alpha} k^*,$$

po uwzględnieniu której dostajemy rozwiązanie układu (23), (24)

w postaci:

$$h^* = \theta \frac{1}{1-\alpha-\beta} \alpha \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta} \beta \frac{1-\alpha}{1-\alpha-\beta}, \quad (25)$$

gdzie:

$$\theta = \frac{a+1-\delta-(2-\gamma)ab\theta}{(n+1)(g+1)}.$$

Kolejnym etapem analizy jest wyznaczenie obszaru zmienności parametrów modelu, przy których równowaga jest lokalnie asymptotycznie stabilna. Do tego celu posłuży macierz linearyzacji, która dla układu (19), (20) w otoczeniu równowagi stacjonarnej przyjmuje postać:

$$J(k^*, h^*) = \begin{bmatrix} \frac{a+1-\delta-(2-\alpha)ab\theta}{(n+1)(g+1)} & \frac{ab\theta\alpha}{(n+1)(g+1)} \\ \frac{ab\theta\beta}{(n+1)(g+1)} & \frac{a+1-\delta-(2-\beta)ab\theta}{(n+1)(g+1)} \end{bmatrix}, \quad (26)$$

gdzie:

$$trJ(k^*, h^*) = \frac{[2(a+1-\delta)-ab\theta(4-\alpha-\beta)]}{(n+1)(g+1)}$$

oraz:

$$\det J(k^*, h^*) = \frac{[a+1-\delta-(2-\alpha)ab\theta][a+1-\delta-(2-\beta)ab\theta]-\alpha\beta a^2 b^2 \theta^2}{(n+1)^2(g+1)^2}.$$

Równowaga będzie lokalnie asymptotycznie stabilna, gdy wszystkie wartości własne macierzy Jacobiego będą co do modułu mniejsze od jedności. Wymaganie to (Medio, Lines 2001) jest równoważne warunkom:

$$1 + trJ + \det J > 0$$

$$1 - trJ + \det J > 0$$

$$1 - \det J > 0,$$

które, dla równowagi (25), przyjmują postać:

Ze względu na skomplikowaną strukturę

$$1 + \frac{[2(a+1-\delta)-ab\theta(4-\alpha-\beta)]}{(n+1)(g+1)} + \frac{[a+1-\delta-(2-\alpha)ab\theta][a+1-\delta-(2-\beta)ab\theta]-\alpha\beta a^2 b^2 \theta^2}{(n+1)^2(g+1)^2} > 0, \quad (27)$$

$$1 - \frac{[2(a+1-\delta)-ab\theta(4-\alpha-\beta)]}{(n+1)(g+1)} + \frac{[a+1-\delta-(2-\alpha)ab\theta][a+1-\delta-(2-\beta)ab\theta]-\alpha\beta a^2 b^2 \theta^2}{(n+1)^2(g+1)^2} > 0, \quad (28)$$

$$1 - \frac{[a+1-\delta-(2-\alpha)ab\theta][a+1-\delta-(2-\beta)ab\theta]-\alpha\beta a^2 b^2 \theta^2}{(n+1)^2(g+1)^2} > 0 \quad (29)$$

algebraiczną powyższych nierówności przeprowadzona zostanie analiza numeryczna, która wykaże istnienie kombinacji parametrów, przy których równowaga jest lokalnie asymptotycznie stabilna. Przykładowo, dla ustalonych wartości parametrów modelu:  $\alpha = 0,31$ ;  $\beta = 0,28$ ,  $n = 0,001$ ;  $\delta = 0,05$ ;  $g = 0,05$ ;  $b = 0,3$  układ nierówności jest spełniony, gdy  $a \in (0,101; 2,205)$ .

Stwierdzenie:

przy ustalonej wartości parametru  $b$  istnieje przedział zmienności parametru  $a \in (a_{\min}; a_{\max})$ , dla którego równowaga jest lokalnie asymptotycznie stabilna, przy czym  $a_{\min}$  jest dodatnie i bliskie zeru.

Porównanie z analogicznym obszarem stabilności wyznaczonym dla modelu Solowa wskazuje, że wprowadzenie kapitału ludzkiego do modelu Solowa ogranicza zakres lokalnej asymptotycznej stabilności ze względu na parametr  $a$ . Przekroczenie granicy obszaru wyznaczonego przez warunki: (27), (28), (29) prowadzi do utraty stabilności i może wiązać się z występowaniem różnych typów bifurkacji. W przypadku układu (19), (20) utrata stabilności w obszarze, gdzie  $a < a_{\min}$  jest związana z niskim poziomem oszczędności

i, co za tym idzie, konsumpcją zgromadzonego kapitału. Odmiennie wygląda sytuacja w punkcie  $a = a_{\max}$ .

Jeżeli:

$$1 + trJ + \det J = 0$$

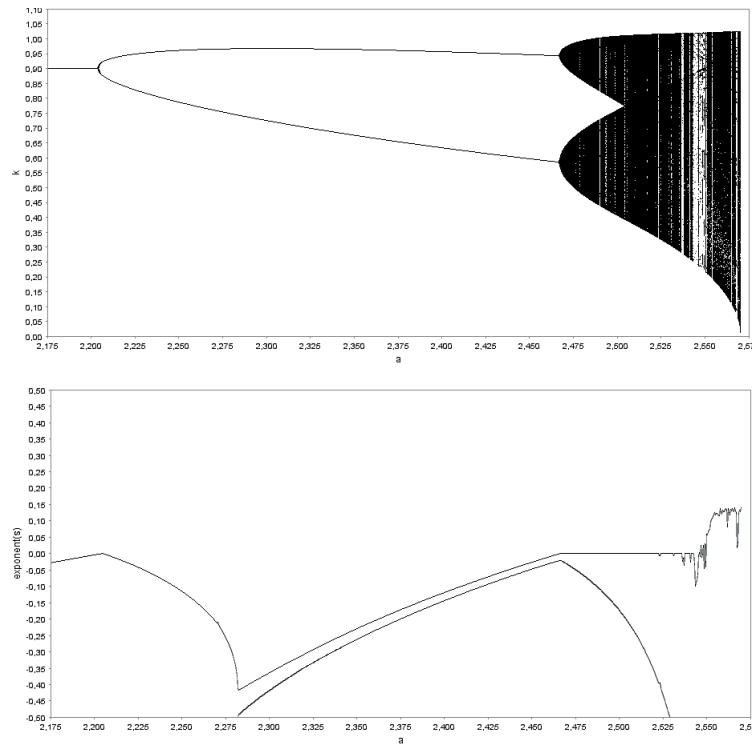
oraz spełnione są jednocześnie warunki:

$$-2 < trJ < 0 \text{ i } -1 < \det J < 1,$$

to mamy do czynienia z bifurkacją podwojenia okresu (Medio, Lines 2001).

W przytoczonym przykładzie taka sytuacja ma miejsce dla  $a_{\max} = 2,205$ , zatem w tym punkcie można spodziewać się utraty stabilności na skutek bifurkacji podwojenia okresu. Analiza numeryczna potwierdza przewidywania. Rysunki 2 i 3 przedstawiają diagramy bifurkacyjne dla kapitałów: fizycznego ( $k$ ), ludzkiego ( $h$ ) na jednostkę efektywnej pracy oraz odpowiadające im wykładniki Lapunowa dla  $\alpha = 0,31$ ;  $\beta = 0,28$ ,  $n = 0,001$ ;  $\delta = 0,05$ ;  $g = 0,05$ ;  $b = 0,3$ . Wzrost stopy oszczędności poprzez parametr  $a$  prowadzi

Rys. 2. Diagram bifurkacyjny dla  $k$  i odpowiadający mu wykładnik Lapunowa dla parametru  $a \in (2,175; 2,57)$ .

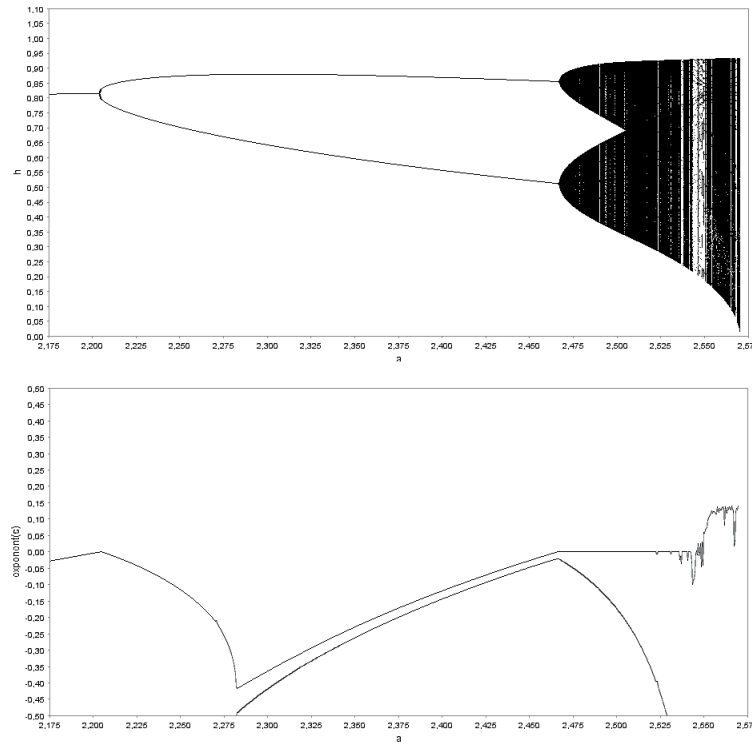


Źródło: opracowanie własne.

do postępującej destabilizacji układu. Dla wartości około 2,466 obserwujemy bifurkację Neimarka-Sackera, która charakteryzuje

się zerowym wykładnikiem Lapunowa (rys. 2, rys. 3) i prowadzi do rozwiązań okresowych i *quasi*-okresowych.

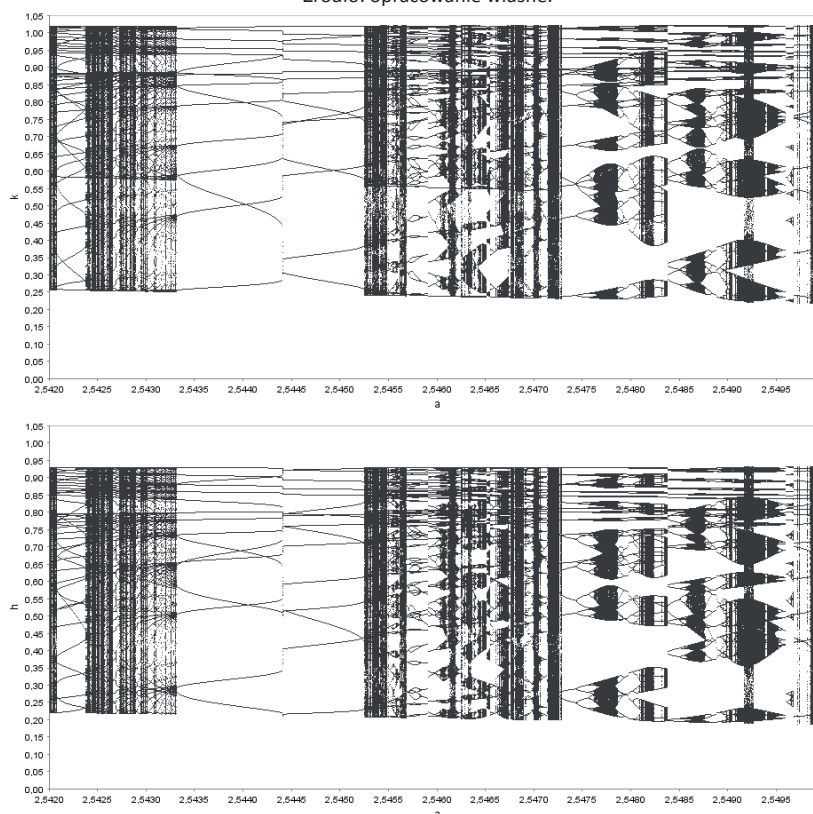
Rys. 3. Diagram bifurkacyjny dla  $h$  i odpowiadający mu wykładnik Lapunowa dla parametru  $a \in (2,175; 2,57)$ .



Źródło: opracowanie własne.

Rys. 4. Diagramy bifurkacyjne dla  $k$  i  $h$ . Parametr  $a \in (2,542; 2,546)$ . Pozostałe wartości parametrów:  $\alpha = 0,31$ ;  $\beta = 0,28$ ;  $b=0,3$ ;  $n = 0,001$ ;  $\delta = 0,05$ ;  $g = 0,05$ .

Źródło: opracowanie własne.



Ostatecznie model wykazuje zachowania chaotyczne, którym odpowiada dodatni wykładnik Lapunowa. Ogranicza to możliwość prognozowania w długim okresie, gdyż maksymalny horyzont czasowy prognozy jest proporcjonalny do odwrotności największego wykładnika Lapunowa. Obszary chaotyczne, tak jak w poprzednim modelu, przedzielone są oknami stabilnych orbit okresowych (matematyczne modele potencjalnych cykli gospodarczych) (rys. 4).

#### Zakończenie

W pracy zaprezentowane zostały zmodyfikowane modele: Solowa oraz Mankiwa-Romera-Weila. Modyfikacja polegała na wprowadzeniu zmiennej stopy oszczędności o charakterze endogenicznym, zgodnie z propozycją R.H. Daya (11). Przeprowadzona analiza wykazała, że zarówno układ jedno-, jak i dwuwymiarowy charakteryzują się złożoną dynamiką, a stopień jej złożoności zależy od parametru obrazującego zachowanie konsumenta w stosunku do realnych stóp procentowych. W obu przypadkach układ traci stabilność na skutek bifurkacji podwojenia

okresu. Ujawniają się zachowania cykliczne, *quasi*-okresowe oraz chaotyczne. Pojawienie się zjawiska chaosu deterministycznego powoduje, że horyzont czasowy dla możliwości prognozowania ogranicza się do tzw. charakterystycznego czasu Lapunowa. Pomiędzy obszarami chaotycznymi pojawiają się okna stabilności o niskim okresie. W przypadku modelu z kapitałem ludzkim pojawia się ponadto bifurkacja Neimarka-Sackera z charakterystycznymi, *quasi*-okresowymi rozwiązaniami. Przeprowadzona analiza nie wyczerpuje tematu, ale unaocznia, że założenie o zmienności stóp oszczędności wpływa znacząco na dynamikę obu typów kapitału oraz że w zaproponowanych modelach możliwa i celowa jest analiza dynamiki również poza obszarem lokalnej asymptotycznej stabilności. Ponadto okazuje się, że rozszerzenie modelu Solowa o kapitał ludzki znacznie ogranicza obszar stabilności równowagi stacjonarnej. Zaproponowane modele eksponują zmienne stopy oszczędności jako potencjalny czynnik pojawiania się okresowych wahań kapitału i tym samym mogą stanowić pomost łączący teorię wzrostu z teorią cyklu koniunkturalnego.



## Bibliografia

- Bernanke B.S., Gurkaynak R.S. (2001), *Is Growth Exogenous? Taking Mankiw, Romer and Weil Seriously*, „NBER Working Paper” No. 8365.
- Day R.H. (1982), *Irregular Growth Cycles*, „The American Economic Review”, Vol. 72, No. 3, pp. 406–414.
- Domański S.R. (1993), *Kapitał ludzki i wzrost gospodarczy*, Warszawa, PWN.
- Dowrick S., Rogers M. (2002), *Classical and Technological Convergence: Beyond the Solow-Swan Growth Model*, „Oxford Economic Papers”, Vol. 54, No. 3, pp. 369–385.
- Ertur C., Koch W. (2007), *Growth, Technological Interdependence and Spatial Externalities: Theory and Evidence*, „Journal of Applied Econometrics”, Vol. 22, No. 6, pp. 1033–1062.
- Hommes C.H. (1991), *Adaptive learning and roads to chaos. The case of the cobweb model*, „Economic Letters”, 36.
- Hommes C.H. (1993), *Periodic, almost periodic and chaotic behaviour in Hicks’ non-linear trade cycle model*, „Economics Letters”, 41.
- Hommes C.H. (1995), *A reconsideration of Hicks’ non-linear trade cycle model*, „Structural Change and Economic Dynamics”, 6.
- Jakimowicz A. (2011), *Dynamika nieliniowa w badaniach ekonomicznych*, „Didactics of mathematics” No. 8 (12).
- Kaldor N. (1957), *A Model of Economic Growth*, „The Economic Journal”, Vol. 67, No 268, pp. 591–624.
- Kruszewski R. (2006), *O pewnym modelu wzrostu gospodarczego z kapitałem ludzkim i endogenicznym postępie wiedzy*, „Problemy wzrostu gospodarczego we współczesnych gospodarstwach”, red. D. Kopycińska, Szczecin Uniwersytet Szczeciński, s. 18–24.
- Kruszewski R. (2006), *Growth model with human capital. Complex economic dynamics*, „Modeling Economies in Transition”, red. Władysław Welfe, Piotr Wdowinski, Łódź, AMFET, s. 63–74.
- Lee K., Pesaran M.H., Smith R. (1997), *Growth and Convergence in a Multi-Country Empirical Stochastic Solow*. „Journal of Applied Econometrics”, Vol. 12, No. 4, pp. 357–392.
- Lines M. (2007), *Bifurcation scenarios in a heterogeneous agent, multiplier accelerator model*, „Pure Mathematics and Applications”, 16.
- Lines M., Westerhoff F. (2010), *Inflation expectations and macroeconomic dynamics: The case of rational versus extrapolative expectations*, „Journal of Economic Dynamics and Control”, 34.
- Lorenz H.W. (1987), *Goodwin’s nonlinear accelerator and chaotic motion*, „Journal of Economics”, 47.
- Malaga K. (2009), *O niektórych dylematach teorii wzrostu gospodarczego i ekonomii*, Warszawa, ZK Polskie Towarzystwo Ekonomiczne.
- Mankiw N. Gregory, David Romer, David N. Weil (1992), *A Contribution to the Empirics of Economic Growth*, „Quarterly Journal of Economics”, 107, pp. 407–437.
- Masanjala W.H., Papageorgiou C. (2004), *The Solow Model with CES Technology: Nonlinearities and Parameter Heterogeneity*, „Journal of Applied Econometrics”, Vol. 19, No. 2, pp. 171–201.
- Medio A., Lines M. (2001), *Nonlinear Dynamics: a Primer*, Cambridge, Cambridge University Press.
- Nonneman W., Vanhoudt P. (1996), *A Further Augmentation of the Solow Model and the Empirics of Economic Growth for OECD Countries*, „The Quarterly Journal of Economics”, Vol. 111, No. 3, pp. 943–953.
- Telega I. (2012), *Trwałość w modelu wzrostu Solowa. Analiza krytyczna*, „Zeszyty Naukowe Nr 12”, Kraków, Polskie Towarzystwo Ekonomiczne.
- Tokarski T. (2007), *Optymalne stopy inwestycji w N-kapitałowym modelu wzrostu gospodarczego*, „Gospodarka Narodowa”, Nr 9.
- Westerhoff H. (2006), *Nonlinear expectation formation, endogenous business cycles and stylized facts*, „Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics”, 10, Issue 4, Article 4.
- Woźniak M.G. (2005), *Znaczenie kapitału ludzkiego w skracaniu dystansu rozwojowego gospodarki Polski*, „Zeszyty Naukowe Nr 3”, Kraków, Polskie Towarzystwo Ekonomiczne.

## **Dynamics of the Solow and Mankiw-Romer-Weil model with endogenous savings rates**

### **Abstract**

The purpose of the study is to analyze the properties and dynamics of economic growth model with endogenous savings rates. Considerations are based on discrete versions of the neoclassical Solow growth model and on the extended Solow model. Variable savings rates that depend on behavioral parameters are introduced. It turns out that this modification significantly diversifies the dynamics of the system. There are periodical and quasi-periodical solutions as well as deterministic chaos. Therefore, long run forecasting is limited.

**Keywords:** economic growth, Solow model, Mankiw-Romer-Weil model, bifurcation, deterministic chaos, variable savings rates, Lyapunov exponent, equilibrium conditions.