The Wroclaw School of Banking
Research Journal
ISSN 1643-7772 I eISSN 2392-1153
Vol. 15 I No. 5
Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły
Bankowej we Wrocławiu
ISSN 1643-7772 I eISSN 2392-1153
R. 15 I Nr 5

Testowanie współzależności w rozwoju gospodarczym

Autor: Anna Janiga-Ćmiel

Abstrakt

Celem zaprezentowanych w niniejszej pracy badań jest analiza współzależności kształtowania się rozwoju gospodarczego Polski i Wielkiej Brytanii. Przedstawiony zostanie wielorównaniowy model GARCH, prezentujący wzajemne relatywne powiązania w zakresie dynamiki rozkładów empirycznych ze szczególnym zwróceniem uwagi na dynamikę wartości oczekiwanych i wariancji.

Słowa kluczowe: wielorównaniowy model GARCH, specyfikacja modelu, rozwój gospodarczy.
JEL: C01, C32, C51.

Wprowadzenie

Przeobrażenia, jakim podlegają systemy społeczno-gospodarcze, ich kształt i to, jak będą się kształtowały, są wynikiem działania szeregu różnych czynników. Gospodarka, wzrost gospodarki są pojęciami bardzo skomplikowanymi. Cykle koniunkturalne i związane
z nimi recesje występują od zawsze. Przyczyny kształtowania się realizacji cykli nie zawsze są znane. Określenie ich wymaga zazwyczaj skomplikowanych rozwiązań, doświadczeń
i czasochłonnych obserwacji. Pozyskane w ten sposób dane statystyczne pozwalają sprecyzować kierunki dalszego poziomu rozwoju gospodarczego.
Poszukujemy przyczyn ich powstawania, dążymy do tego, by wzbogacić nasze doświadczenia i obserwacje. Jedne zjawiska podlegają samoczynnie zmianom, inne wpływają na zmiany w drugich zjawiskach.
W literaturze światowej znajdujemy różnorodne teorie związane ze wzrostem gospodarczym czy też z zanikiem cykli koniunkturalnych w okresach długotrwałej prosperity, które powstawały na przestrzeni wielu lat (Drozdowicz-Bieć 2006). Ekonomiści zauważają postępującą synchronizację cykli koniunkturalnych na świecie (Skrzypczyński 2006), co związane jest z rozwojem globalizacji, postępem technicznym, zmianami politycznymi. Fakt, że każdy cykl różni się od następnego i poprzedniego, stwarza problemy w konstruowaniu modeli, znajdowaniu uniwersalnych narzędzi kształtowania gospodarek. Należy więc w badaniach odpowiednio dobrać aparat matematyczny, za pomocą którego można przeprowadzać analizy.
Analiza ekonometryczna pozwala na wyznaczenie modeli współzależności występujących między czynnikami kształtującymi dynamikę rozwoju gospodarczego. W celu uzyskania spójnego źródła kształtującego rozwój gospodarczy wprowadzić możemy zmienne syntetyczne, które stanowią punkt wyjścia konstrukcji modeli ekonometrycznych, modeli matematycznych. Wybrane modele teoretyczne badanego zagadnienia stanowią przybliżony opis współzależności mających miejsce w rozpatrywanym zagadnieniu i stanowią jednocześnie obraz badanej rzeczywistości.
Wielorównaniowe modele GARCH są stosowane do badania zależności między procesami rozwoju w różnych populacjach. Zbadać można między innymi niezmienność lub wzrost korelacji w krótkim lub długim okresie spowodowanym globalizacją lub liberalizacją wymagań stawianych

Anna Janiga-Ćmiel
Wydział Zarządzania
Katedra Matematyki
Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

funkcjonowaniu zjawisk. Zbadać można wpływ postępu technologicznego w poszczególnych populacjach i odpowiedni wpływ jednej populacji na drugą. Modele GARCH spełniają również ważną rolę przy badaniu przepływu informacji między badanymi populacjami. Duże znaczenie przypisuje się modelom GARCH przy opisie zmienności rozwoju badanego zjawiska.

Modele GARCH są odporne na wszelkie zmiany sytuacji w czasie powodujące niestabilność związków. Są odporne na szybkość zmian w przekazywanej informacji

i stanowią uniwersalne podejście do wygładzania zniekształceń i przekłamań

w przekazywanej informacji. Wielorównaniowe modele (Doman, Doman 2004) charakteryzuje duża zgodność z rzeczywistością badanego zjawiska.

Wielowymiarowe ujęcie modelowania rozwojów gospodarczych

Złożone procesy ekonomiczne możemy opisywać, wykorzystując między innymi autoregresyjny model klasy GARCH. Model ten podlegał z upływem czasu skomplikowanym modyfikacjom i rozszerzeniom. W literaturze znajdujemy dziesiątki możliwych rozszerzeń modelu GARCH zaproponowanych przez badaczy (Fiszeder 2009)] (Bollerslev, Ding, Granger, Hafner, Laurent, Chou i Kroner, Bera i Higgins, Engle i Nelson, Gourieroux, Osiewski i Pipień, Tsay, Bauwens, Laurent i Rombouts, Weron, Brzeszczyński i Kelm, Doman, Fiszeder).

Nieustająca modyfikacja postaci modeli zmienności zależna była od występujących w szeregach czasowych własności. Rozszerzenia modelu ([Hosking 1980) polegały w szczególności na dołączaniu dodatkowych parametrów strukturalnych w równaniu zmienności lub na transformacji postaci tego równania. Jedną z największych zalet analizowanych modeli z rodziny GARCH jest możliwość rozbudowywania równań przez wprowadzenie różnego typu zmiennych egzogenicznych. Zmodyfikowany model pozwala na przykład na powiązanie dynamiki zmienności z procesami mającymi miejsce w otoczeniu gospodarczym rynku oraz przeprowadzenia analizy zaistniałych zależności.

Model DCC-GARCH (Franco i Zakoian 2009), został zaproponowany przez Engele'a, natomiast Bollerslev (Bollerslev 2009) wprowadził do badań model stałych warunkowych współczynników korelacji CCC-GARCH. Model ten zakłada (Wang 2003), że zmieniające się w czasie warunkowe kowariancje są proporcjonalne do iloczynu odpowiednich warunkowych odchyleń standardowych. Modele DCC i CCC stosujemy do opisu dynamiki rozwoju zjawisk (Doman, Doman 2009), scharakteryzowanych za pomocą wielowymiarowych szeregów czasowych, przy czym model CCC w przypadku uzyskania stałej macierzy korelacji przy upływie czasu, a przy zmiennej macierzy korelacji model DCC.

Wielowymiarowe procesy stochastyczne stanowią losowy opis dynamiki zjawiska, w którym mamy do czynienia z różnego rodzaju charakterem współzależności między poszczególnymi zmiennymi. W procesach gospodarczych stan oczekiwany zjawiska jest zmienny i zależny zasadniczo od upływu czasu oraz od innych czynników specyficznych dla rozpatrywanej gospodarki:

$$\mu_t = \mu(t, \psi_{t-1}), \tag{1}$$

Gdzie:

t to jednostka czasowa związana z numeracją okresów badania empirycznego w latach 2001–2012, czyli $t = 1, \ldots, 12$,

ψ_{t-1} to uwarunkowania związane z działalnością gospodarczą w poprzednich latach kształtujące zarówno stan oczekiwany jak i czynniki losowe.

Wielorównaniowy model GARCH (Franco, Zakoian 2009) wymaga sprecyzowania odrębnego opisu realizacji wartości oczekiwanych i zmienności wariancji.

W takiej sytuacji proces stochastyczny ma losowość skupioną w składniku losowym i przedstawia się następująco:

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t, \tag{2}$$

gdzie:

$$\varepsilon_t = D_t \cdot z_t \tag{3}$$

D_t jest macierzą diagonalną lub sprowadzaną do postaci kanonicznej:

$$D_t = \begin{bmatrix} \sqrt{h_{1t}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{h_n} \end{bmatrix} \tag{4}$$

Proces stochastyczny rozpatrujemy w przestrzeni N-wymiarowej.

Proces z_t jest również procesem N-wymiarowym o wartościach oczekiwanych równych zero (Nakatani i Teräsvirta 2009a).

$$z_t = \begin{bmatrix} z_{1,t} \\ \vdots \\ z_{n,t} \end{bmatrix} \tag{5}$$

Wektor stanów oczekiwanych procesu stochastycznego:

$$\mu_t = \begin{bmatrix} \mu_{1,t} \\ \vdots \\ \mu_{n,t} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

Za pomocą R oznaczamy macierz korelacji między zmiennymi tworzącymi proces stochastyczny:

$$R = [\rho_{ij,t}], \tag{7}$$

Z kolei ε_t to zmienna losowa (Nakatani 2010), której warunkowa wartość oczekiwana jest równa zero w sytuacji, gdy uwarunkowania ψ_{t-1} stanowią stany z $\max\{p,q\}$ okresów wcześniejszych.

$$E[\varepsilon_t|\psi_{t-1}], \tag{8}$$

Przy powyższych założeniach warunkowy stan oczekiwany wariancji i kowariancji składnika losowego przedstawiony jest za pomocą macierzy H_t w następujący sposób:

$$H_t = \begin{cases} h_{i,t} & i = j \\ \sqrt{h_{i,t}}\sqrt{h_{j,t}}\rho_{ij} & i \neq j \end{cases} \tag{9}$$

Macierz H_t definiujemy, zatem następująco:

$$H_t = D_t R D_t \tag{10}$$

Macierz D_t jest odpowiednio macierzą podobieństwa macierzy H_t i R.

W sytuacji, gdy R jest macierzą stałą, wówczas macierz kowariancyjna H_t jest również macierzą stałą.

Kolejne wektory macierzy H_t wyznaczamy z wykorzystaniem modelu GARCH(*p*,*q*) i wektory te przedstawione są w następujący sposób:

$$h_t = \begin{bmatrix} h_{1,t} \\ \vdots \\ h_{N,t} \end{bmatrix} = a_0 + \sum_{i=1}^{q} A_i \varepsilon_{t-i}^{(2)} + \sum_{j=1}^{p} B_j H_{t-j} \tag{11}$$

Zaprezentowany N-wymiarowy model GARCH(*p*,*q*) zawiera kombinację liniową wektorów składnika losowego ε_{t-i} i macierzy wariancji i kowariancji H_{t-j}. Występujące macierze A_i, B_j zawierają oszacowania ocen parametrów strukturalnych kolejnych równań wielorównaniowego modelu i są macierzami kwadratowymi stopnia N.

W modelu tym wektor wyznaczamy następująco:

$$\varepsilon_t^{(2)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t}^2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{n,t}^2 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Wariancje losowe procesu stochastycznego zapisujemy w postaci:

$$h_{it} = \begin{bmatrix} h_{1,t} \\ \vdots \\ h_{n,t} \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$h_{t-j} = \begin{bmatrix} h_{1,t-j} \\ \vdots \\ h_{n,t-j} \end{bmatrix} \tag{14}$$

oraz opóźnionych wariancji dla *p* okresów wstecz.

Zaprezentowany wielorównaniowy model dynamiki za pomocą równań (11) jest rozszerzonym modelem ([Nakatani 2010), DCC(EDCC)-GARCH(*p*,*q*). W sytuacji, jeżeli A_i,B_j są macierzami diagonalnymi, wówczas uwzględniany model jest modelem DCC-GARCH(*p*,*q*). Natomiast, gdy B_j są macierzami zerowymi, model upraszcza się do postaci modelu CCC-ARCH(*p*,*q*).

Engle połączył właściwości modelu czynnikowego z modelem DCC (Engle 2002)

i zaproponował model czynnikowy DCC, stanowiący jednak rozszerzenie czynnikowego modelu GARCH (Fiszeder 2009). Modyfikację modelu DCC zaproponowali również Engle

i Kelly, wprowadzając założenie, że warunkowe współczynniki korelacji są identyczne dla wszystkich par szeregów czasowych, modyfikację określono modelem DECO (Choi i Hyung 2011). W literaturze znajdujemy również model DCC zaproponowany przez Tse i Tsui, który różni się od modelu DCC Engle'a głównie parametryzacją macierzy korelacji.

W przypadku zjawisk heteroskedastycznych wykazano, że wystarczający opis zjawiska gwarantują modele rzędu pierwszego. W przypadku modeli rzędu pierwszego macierz VECH wymaga oszacowania *n*(2*n*+1) parametrów.

W przypadku modeli rzędu *p* i *q* najlepsze wyniki otrzymujemy dla procesów ściśle stacjonarnych, jeżeli natomiast mamy do czynienia z procesem niestacjonarnym, to rozpatrywać należy modele EDCC-GARCH(2,2). Dotyczy to modeli procesów z heteroskedastycznością (Nakatani i Teräsvirta 2009b). W ten sposób wprowadzamy odpowiednio macierz H_t do modelu uwzględniającą dynamikę macierzy korelacji.

W szczególności, gdy badamy zjawisko obciążone wyłącznie autokorelacją i to zarówno w przypadku, gdy znana jest lub nieznana funkcja autokorelacji, wystarczy posłużyć się modelami rzędu *p*=*q*=4.

Dla procesów uwzględniających heteroskedastyczność wyznaczamy model postaci:

$$h_t = \begin{bmatrix} h_{1,t} \\ h_{2,t} \end{bmatrix} = a_0 + A_1 \varepsilon_{t-1}^{(2)} + B_1 h_{t-1} \tag{15}$$

Wymagane jest dodatkowo wyznaczenie parametrów zgodnie z przedstawioną strukturą modelu:

$$h_t = \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^2_{1,t-1} \\ \varepsilon^2_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{1,t-1} \\ h_{2,t-1} \end{bmatrix} \quad (16)$$

W modelu powyższym dokonano rozbicia na składową zależną od opóźnień składników losowych ε_{t-1}. Jest to składowa związana z macierzą A_1. Druga składowa związana z macierzą B_1 zawiera opóźnienia uwarunkowań z przeszłości, które kształtują aktualny poziom wariancji. Rozgraniczenia takiego dokonano, by rozróżnić czynniki kształtujące współzależność od tych czynników, które nie mają wpływu na dynamikę współzależności.

Model ten, jak już wcześniej zaznaczono, wymaga wyznaczenia modelu VECH dla oszacowania 10 parametrów. Parametry te przedstawiamy pomocniczo w postaci poniższych wektorów.

Wektor:

$$\varpi = [\varpi_1 \ , \varpi_2 \ ] \quad (17)$$

Gdzie:

- ϖ_1 dotyczy parametrów pierwszego równania, to znaczy jednej spośród wybranych obserwacji, natomiast ϖ_2 drugiego równania, czyli drugiej spośród wybranych obserwacji.

Zgodnie z powyższym wektor ϖ_1 przyjmuje postać:

$$\varpi_1 = [a_{10}, a_{11}, a_{12}, b_{11}, b_{12}]^T \quad (18)$$

Analogicznie wektor ϖ_2 zawiera parametry:

$$\varpi_2 = [a_{20,} a_{21}, a_{22}, b_{21}, b_{22}]^T \quad (19)$$

Wprowadzamy pomocniczy wektor wariancji składników losowych:

$$V_t = [1, \varepsilon^2_{1,t}, \varepsilon^2_{2,t}, h_{1,t}, h_{2,t}]^T \quad (20)$$

W celu sprawdzenia, czy istnieją uwarunkowania stacjonarne procesu, obliczamy na podstawie otrzymanego modelu pierwsze pochodne cząstkowe $h_{1,t}h_{1,t}$, $h_{2,t}h_{2,t}$, względem $\varpi_1\varpi_1$ i $\varpi_2\varpi_2$ (Nakatani 2010). Pochodne te wyznaczamy następująco:

$$\frac{\partial h_{1,t}}{\partial \varpi_1} = v_{t-1} + b_{11} \frac{\partial h_{1,t-1}}{\partial \varpi_1} + b_{12} \frac{\partial h_{2,t-1}}{\partial \varpi_1}$$

$$\frac{\partial h_{1,t}}{\partial \varpi_2} = v_{t-1} + b_{11} \frac{\partial h_{1,t-1}}{\partial \varpi_2} + b_{12} \frac{\partial h_{2,t-1}}{\partial \varpi_2}$$

$$\frac{\partial h_{2,t}}{\partial \varpi_1} = v_{t-1} + b_{21} \frac{\partial h_{2,t-1}}{\partial \varpi_1} + b_{22} \frac{\partial h_{2,t-1}}{\partial \varpi_1}$$

$$\frac{\partial h_{2,t}}{\partial \varpi_1} = v_{t-1} + b_{21} \frac{\partial h_{2,t-1}}{\partial \varpi_1} + b_{22} \frac{\partial h_{2,t-1}}{\partial \varpi_1} \quad (21)$$

$$\frac{\partial h_{2,t}}{\partial \varpi_2} = v_{t-1} + b_{21} \frac{\partial h_{2,t-1}}{\partial \varpi_2} + b_{22} \frac{\partial h_{2,t-1}}{\partial \varpi_2}$$

Zauważmy, że przedstawione pochodne cząstkowe nigdy nie przyjmują jednocześnie wartości zero. Potwierdzają to przedstawione rozwinięcia zawierające pochodne cząstkowe rzędu pierwszego, a wśród nich występujące pochodne *i*-tej wariancji h_{it} względem *j*-tego wektora ω_j. Pochodne są różne od zera, ponieważ wariancja nie jest stała. Natomiast pochodne *i*-tej wariancji względem *j*-tej obserwacji byłyby równe zero, gdyby nie występowała współzależność w rozwoju analizowanych zjawisk. Różne od zera pochodne cząstkowe świadczą o występowaniu współzależności w rozwoju zjawisk. Skoro dla h_{1t} nie występuje ω_2, to h_{1t} ze względu na ω_2 jest stałe i pochodna h_{1t} ze względu na ω_2 wynosi zero. I odwrotnie, skoro h_{2t} dla ω_1 nie występuje, to oznacza, że h_{2t} jest stała ze względu na ω_1 i pochodna h_{2t} ze względu na ω_1 jest równa zero. Oznacza to, że w żadnym wypadku zjawisko nie będzie procesem stacjonarnym.

Podstawą weryfikacji współzależności rozwojów gospodarczych są stany zjawisk przedstawione za pomocą wektorów ocen parametrów ϖ_1, ϖ_2 (18), (19). Wektory te są wektorami ocen modeli wariancji rozwojów gospodarczych $h_{1t}h_{1t}$, $h_{2t}.h_{2t}$. W modelach tych uwzględniono macierze A_iA_i oraz B_jB_j. Jeżeli macierze okażą się diagonalne, wówczas kowariancje badanych rozwojów gospodarczych będą równe zero, więc oznaczać to będzie niezależność rozwojów gospodarczych i wówczas wektory (18), (19) przyjmują postacie:

$$\varpi_1{'} = [a_{10}, a_{11,} 0, b_{11,} 0] \quad (22)$$

$$\varpi_2{'} = [a_{20}, 0, a_{22}, 0, b_{22}] \quad (23)$$

Powyższe dwa wektory stanowią podstawę konstrukcji hipotezy głównej testu.

H_0: $\varpi_1{'} = [a_{10}, a_{11,} 0, b_{11,} 0]^T$ oraz

$\varpi_2{'} = [a_{20}, 0, a_{22}, 0, b_{22}]^T$.

Hipoteza alternatywna:

$$H_1: \ \varpi_1 = [a_{10}, a_{11}, a_{12}, b_{11}, b_{12}]^T$$

$$\varpi_2 = [a_{20,} a_{21}, a_{22}, b_{21}, b_{22}]^T. \quad (24)$$

W trakcie weryfikacji przedmiotowych hipotez badamy, czy wektor $\varpi_1 = \varpi_1'$ oraz wektor $\varpi_2 = \varpi_2'$. Analizujemy statystyczną zgodność, przy ustalonym poziomie istotności. Otrzymanie równości obu par wektorów gwarantuje brak współzależności zjawisk w procesie rozwoju, ponieważ uzasadnia to występowanie zerowych współrzędnych odpowiedniego wektora.

W przeciwnym wypadku należy potwierdzić zachowanie współzależności rozwoju zjawisk. Jeżeli wykażemy słuszność tej hipotezy, wówczas przy ustalonym poziomie istotności możemy stwierdzić, że rozwoje gospodarcze odbywają się w sposób skorelowany. Jeżeli natomiast nie wykażemy statystycznej zgodności równości wektorów, wówczas hipotezę tę należy odrzucić i przyjąć hipotezę o niezależności rozwojów gospodarczych.

Analiza zależności rozwoju gospodarczego Polski i Wielkiej Brytanii

W celu przedstawienia analiz dla wybranych państw (Wielka Brytania, Polska) przygotowano dane empiryczne, korzystając z danych publikowanych przez Główny Urząd Statystyczny oraz na stronie Eurostatu – dane o rocznym poziomie PKB (Hellwig 1997). Wskaźnik PKB stanowi podstawową determinantę zmian w rozwoju gospodarek i zarazem czynnik kształtujący wahania koniunkturalne. Jako okres analizy przyjęto lata od roku 2001 do roku 2012. Dane o rocznym poziomie PKB (Janiga-Ćmiel 2013) w rozpatrywanych krajach sprowadzono do poziomów porównywalnych w różnych okresach, stosując odpowiednie współczynniki wyrównania. Wyznaczono wskaźniki rozwoju gospodarczego, przyjmując je jako iloraz produktu krajowego brutto do liczby ludności w danym kraju. PKB (Yamarone 2006) stanowi w pewnym ujęciu syntetyczną charakterystykę sytuacji ekonomicznej kraju. Jego wartość i zmienność uzależnione są od wielu czynników stanowiących o rozwoju gospodarczym w rozpatrywanym kraju. Odniesiony do liczby ludności stanowi podstawową miarę poziomu koniunktury gospodarczej w kraju.
Analizę poszerzono o dostępne w *Rocznikach Statystycznych* informacje na temat podobnych czynników, jakie przyjęto do opisu kształtowania zmienności rozwoju gospodarczego wybranych państw. Rozwoje gospodarcze państw, których gospodarki zostały poddane badaniu, mogą reprezentować rozwoje zależne od siebie lub niezależne. Wykrycie takich zależności z wykorzystaniem modeli GARCH wymaga analizy rozwoju gospodarczego uwzględniającego pary odpowiednich modeli. Przykład prezentuje porównanie Polski oraz Wielkiej Brytanii. Dla wybranych państw wyznaczono odpowiednie macierze A_0 A_0, A_1, B_1 A_1, B_1, zaprezentowane poniżej:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0{,}01 \\ 0{,}04 \end{bmatrix} \tag{25}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0{,}32 & 0{,}0002 \\ 0{,}0002 & 0{,}45 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0{,}26 & 0{,}0001 \\ 0{,}001 & 0{,}22 \end{bmatrix}$$

Model uwzględniający powyższe macierze jest następującej postaci:

$$h_{1t} = 0{,}04 + 0{,}32\varepsilon_{1t-1}^2 + 0{,}0002\varepsilon_{2t-1}^2 + \\ + 0{,}26h_{1t-1} + 0{,}0001h_{2t-1} \tag{26}$$

$$h_{2t} = 0{,}01 + 0{,}0002\varepsilon_{1t-1}^2 + 0{,}45\varepsilon_{2t-1}^2 + \\ + 0{,}0001h_{1t-1} + 0{,}224h_{2t-1} \tag{27}$$

Gdzie odpowiednio:
$h_{1,t}$– dotyczy dynamiki rozwoju gospodarczego Polski, $h_{2,t}$– dotyczy dynamiki rozwoju gospodarczego Wielkiej Brytanii.
Pochodne cząstkowe obliczono, aby zbadać, czy wariancje są zmienne, czy też stałe przy upływie czasu.

$$\frac{\partial h_{1,t}}{\partial \varpi_1} = v_{1,t-1} + 0{,}26\frac{\partial h_{1,t-1}}{\partial \varpi_1} + 0{,}0001\frac{\partial h_{2,t-1}}{\partial \varpi_1}$$

$$\frac{\partial h_{1,t}}{\partial \varpi_2} = v_{2,t-1} + 0{,}26\frac{\partial h_{1,t-1}}{\partial \varpi_2} + 0{,}0001\frac{\partial h_{2,t-1}}{\partial \varpi_2}$$

$$\frac{\partial h_{1,t}}{\partial \varpi_2} = v_{2,t-1} + 0{,}26\frac{\partial h_{1,t-1}}{\partial \varpi_2} + 0{,}0001\frac{\partial h_{2,t-1}}{\partial \varpi_2}$$

$$\frac{\partial h_{2,t}}{\partial \varpi_1} = v_{3,t-1} + 0{,}0004\frac{\partial h_{1,t-1}}{\partial \varpi_1} + 0{,}22\frac{\partial h_{2,t-1}}{\partial \varpi_1}$$

$$\frac{\partial h_{2,t}}{\partial \varpi_2} = v_{4,t-1} + 0{,}0004\frac{\partial h_{1,t-1}}{\partial \varpi_2} + 0{,}022\frac{\partial h_{2,t-1}}{\partial \varpi_2} \tag{28}$$

Przedstawione pochodne cząstkowe są zmienne przy upływie czasu. Występujące składniki $V_{i,t-1}$ dla *i* = 1,2,3,4 są różne od zera, ponieważ zawierają kwadraty reszt modelu GARCH.
Pochodne cząstkowe wariancji $h_{1t}h_{1t}$, h_{2t} h_{2t}, względem stanu rozwoju gospodarczego
w poszczególnych gospodarkach są dodatnie w przypadku stymulującego oddziaływania gospodarek, a ujemne w przypadku destymulującego. Pary pochodnych cząstkowych występujące w jednym równaniu nigdy nie będą przeciwnego znaku, czyli nigdy się nie zredukują. Oznacza to, że przedstawione cztery pochodne cząstkowe są różne od zera, co oznacza współzależność rozwojów gospodarczych. Macierze A_1, $A_1B_1B_1$ nie są macierzami diagonalnymi.
W sytuacji, gdy macierze A_iA_i, B_iB_j nie są diagonalne, mamy do czynienia z rozwojami współzależnymi.
Gdyby w analizowanym przypadku wszystkie pochodne cząstkowe były stałe, wówczas w oparciu o określony poziomu ufności możemy stwierdzić, że zależności przy upływie czasu są zachowane. Rozumiemy to w tym sensie, że mamy do czynienia ze wzrostem gospodarczym w obu krajach lub ze spadkiem.

Wiadomo również, że macierze A_i oraz B_j mogą prezentować dowolny charakter, mogą być na przykład macierzami symetrycznymi. Jeżeli nie są symetryczne, to z góry można przewidywać, że zachowanie współzależności zjawisk nie będzie miało miejsca.

Wnioski

W artykule zaprezentowano konstrukcję zmodyfikowanej postaci modelu DCC-GARCH. Następnie model ten wykorzystano w metodzie weryfikacji dynamiki współzależności zjawisk ekonomicznych. Analizę przeprowadzono w oparciu o dane zebrane dla Polskii Wielkiej Brytanii. Otrzymane wyniki przeprowadzonego badania współzależności rozwoju gospodarczego Polski oraz Wielkiej Brytanii potwierdzają występującą współzależność dynamiki. Analogiczne badania można przeprowadzić dla innych par krajów UE otrzymując w pewnym stopniu obraz rozwoju gospodarczego w badanych parach krajów.

Bibliografia

Bollerslev T. (2009), *Modelling the Coherence In Short-Run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Approach*, „Review of Economics and Statistics", 72.

Choi K., Hyung N. (2011), *Measuring Volatility Spillovers,* Department of Economics, University of Seoul, Seoul, Korea.

Drozdowić-Bieć M. (2006), *Wskaźniki wyprzedzające*. Prace i materiały INSTYTUTU ROZWOJU GOSPODARCZEGO, Warszawa, SGH.

Doman M., Doman R. (2004), *Ekonometryczne modelowanie dynamiki polskiego rynku finansowego*. Poznań, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu.

Doman M., Doman R. (2009), *Modelowanie zmienności i ryzyka*, Kraków, Wolters Kluwer Polska.

Engle R.F. (2002), *Dynamic Conditional Correlation – A Simple Class of Multivariate GARCH Models*, „Journal of Business and Economic Statistics", 20.

Fiszeder P. (2009), *Modele klasy GARCH w empirycznych badaniach finansowych.*, Toruń, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika.

Franco Ch., Zakoian J.M. (2009), *GARCH models. Structure, statistical inference and financial applications*, New York.

Hellwig Z. (1997), *Ekspansja gospodarcza Polski końca XX wieku*, Poznań, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Bankowej.

Hosking J. (1980), *The Multivariate Portmanteau Statistic*, „Journal of American Statistical Association".

Janiga-Ćmiel A. (2013), *Analiza zależności przyczynowych rozwoju gospodarczego Polski*

i wybranych państw Unii Europejskiej, „Studia Ekonomiczne", Zeszyty Naukowe Wydziałowe 159, Katowice, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach.

Skrzypczyński P. (2006), *Analiza synchronizacji cykli koniunkturalnych w strefie euro*, Warszawa, NBP.

Nakatani T., Teräsvirta T. (2009a), *Appendix to Testing for volatility interactions in the constant conditional correlation GARCH model*, Department of Economic Statistics, Stockholm School of Economics.

Nakatani T., Teräsvirta T. (2009b), *Testing for volatility interactions in the constant conditional correlation GARCH model*, „The Econometrics Journal" 12.

Nakatani T. (2010), *Four Essays on Building Conditional Correlation GARCH Model*, Department of Economic Statistics, Stockholm School of Economics.

Wang P. (2003), *Financial Econometrics. Methods and Models*, Routledge Chapman & Hall.

Yamarone R. (2006), *Wskaźniki ekonomiczne: przewodnik dla inwestora*, Wydawnictwo Helion.

Testing interdependence in the economic development

Abstract
The paper examines the development of Polish economy as well as the development of the UK economy in the period from 2001 to 2012. For that purpose, models based on the GDP growth in particular countries were built. A comparative analysis of the development of economies in the countries concerned (the United Kingdom, Poland), based on a specially built multivariate GARCH model, is presented. The theory of the construction of a multivariate GARCH model and its estimation method are discussed.

Keywords: Multivariate GARCH, Model specification, Economic development.